Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky

Notas para los cursos 21 y 22 (J.L. Mancilla Aguilar)

El siguiente resultado, conocido como la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky, es fundamental tanto para probar la desigualdad triangular de la norma inducida por un producto interno como para definir ángulo entre vectores de un espacio vectorial real.

Teorema. Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) con producto interno $(\cdot, \cdot)$.

Entonces

$$|(u, v)| \leq \|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in V.$$

Además, la igualdad $|(u, v)| = \|u\|\|v\|$ vale si y sólo si u y v son linealmente dependientes.

Dado que el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es un caso particular del caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, para probar el teorema basta demostrar su validez en el caso complejo. Sin embargo, para que se vean más claramente los argumentos que se emplean en la demostración, daremos primero una demostración para el caso real y luego adaptaremos ésta al caso complejo.

Comencemos entonces suponiendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Afirmamos que el teorema queda demostrado si probamos lo siguiente:

(a) u y v l.i. $\Rightarrow |(u, v)| < \|u\|\|v\|$;

(b) u y v l.d. $\Rightarrow |(u, v)| = \|u\|\|v\|$.

En efecto de (a) y (b) deducimos inmediatamente que $|(u, v)| \leq \|u\|\|v\| \ \forall u, v \in V$ y de (b) que si u y v son l.d. entonces $|(u, v)| = \|u\|\|v\|$. Por otra parte, si vale la igualdad $|(u, v)| = \|u\|\|v\|$, no queda otra que u y v sean l. d., ya que si fuesen l.i. por (a) valdría la desigualdad estricta y no la igualdad.

Pasamos a probar (a). Sean u y v dos vectores de V l.i., entonces, si α es un escalar arbitrario,

$$\begin{aligned} \|u + \alpha v\|^2 &= (u + \alpha v, u + \alpha v) \\ &= (u, u) + (u, \alpha v) + (\alpha v, u) + (\alpha v, \alpha v) \\ &= \|u\|^2 + 2\alpha(u, v) + \alpha^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, como $u + \alpha v \neq 0$ (¿por qué?), $\|u + \alpha v\|^2 > 0$, con lo cual, teniendo en cuenta lo anterior, resulta

$$\|u\|^2 + 2\alpha(u, v) + \alpha^2\|v\|^2 > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si llamamos $a = \|v\|^2$, $b = 2(u, v)$ y $c = \|u\|^2$, la desigualdad anterior nos dice que el polinomio de segundo grado $p(t) = at^2 + bt + c$ carece de raíces reales (¿por qué?) y que por lo tanto el discriminante de la ecuación cuadrática $t^2 + bt + c = 0$ debe ser negativo, es decir, $b^2 - 4ac < 0$. Entonces

$$\begin{aligned} b^2 &< 4ac \\ 4(u, v)^2 &\leq 4\|v\|^2\|u\|^2 \\ |(u, v)| &< \|u\|\|v\| \end{aligned}$$

quedando probado (a).

Veamos ahora (b). Sean u y v dos vectores de V l.d. Sin perder generalidad supongamos que $u = \alpha v$ para algún escalar α (Caso contrario $v = \alpha u$). Entonces

$$|(u, v)| = |(\alpha v, v)| = |\alpha|\|v\|\|v\| = \|u\|\|v\|$$

que es lo que queríamos demostrar.

Pasemos ahora al caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Igual que en el caso real demostraremos que valen (a) y (b). Veamos (a). Supongamos u y v l.i. Entonces, para cualquier escalar α complejo

$$\begin{aligned} \|u+\alpha v\|^2 &= (u+\alpha v, u+\alpha v) \\ &= (u,u)+(u,\alpha v)+(\alpha v,u)+(\alpha v,\alpha v) \\ &= \|u\|^2+\alpha(u,v)+\overline{\alpha}(v,u)+|\alpha|^2\|v\|^2 \\ &= \|u\|^2+\alpha(u,v)+\overline{\alpha(u,v)}+|\alpha|^2\|v\|^2 \\ &= \|u\|^2+2\mathrm{Re}(\alpha(u,v))+|\alpha|^2\|v\|^2. \end{aligned}$$

Como, al igual que en el caso real, $\|u+\alpha v\|^2 > 0$, resulta que

$$\|u\|^2+2\mathrm{Re}(\alpha(u,v))+|\alpha|^2\|v\|^2 > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Ahora, para poder aplicar un argumento similar al que utilizamos en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, procedemos como sigue: llamemos $z = (u,v)$ y consideremos dos casos $z = 0$ ó $z \neq 0$. Si $z = 0$ tenemos que

$$0 = |z| = |(u,v)| < \|u\|\|v\|,$$

pues, al ser u y v l.i. ninguno de los dos es nulo.

Si $z \neq 0$, ponemos en la desigualdad (1) $\alpha = t\overline{z}/|z|$, con $t \in \mathbb{R}$ arbitrario, y obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &< \|u\|^2+2\mathrm{Re}(\alpha(u,v))+|\alpha|^2\|v\|^2 \\ &= \|u\|^2+2\mathrm{Re}(t\overline{z}z/|z|)+|t\overline{z}/|z||^2\|v\|^2 \\ &= \|u\|^2+2|z|t+\|v\|^2t^2 \end{aligned}$$

pues $t\overline{z}z/|z| = t|z|^2/|z| = t|z| \in \mathbb{R}$, con lo cual $\mathrm{Re}(t\overline{z}z/|z|) = t|z|$, y $|t\overline{z}/|z||^2 = t^2$ porque $|\overline{z}/|z|| = 1$. Llamando ahora $a = \|v\|^2$, $b = 2|z|$ y $c = \|u\|^2$, tenemos que el polinomio $p(t) = at^2+bt+c$ carece de raíces reales, de lo cual deducimos que $b^2-4ac < 0$ y de allí que $|(u,v)| < \|u\|\|v\|$, quedando demostrado (a).

La parte (b) se demuestra exactamente igual que en el caso real.